

Vorschlag einer neuen Begriffsschrift

von Gerald Bühler

vorgetragen am 27. 7. 2004

am Institut für Informatik

(Lehrstuhl VIII, Prof. Dr. Stoyan)

der FAU Erlangen-Nürnberg

<http://www.geraldbuehler.de/logik/begriffsschrift/>

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung.....	3
2. Motivation.....	5
2.1 Struktur der Syllogismen.....	5
2.2 Strukturelle Verwandtschaft aussagenlogischer und prädikatenlogischer Schlüsse ..	6
2.3 Einige Charakteristika Freges Begriffsschrift	8
2.3.1 Freges Auffassung von Begriffen.....	8
2.3.2 Freges Argumente für die Einführung von Quantoren.....	8
2.3.3 Rückführung der Wahrheit eines Satzes auf die Wahrheit der (singulären) Teilsätze	10
2.3.4 Enthält Freges Begriffsschrift (und die moderne Logiknotation) redundante Elemente?.....	11
3. Analyse der Sprache	12
4. Entwicklung der neuen Begriffsschrift	16
5. Fazit.....	22
6. Literatur.....	23

1. Einleitung

Frege hat mit seiner *Begriffsschrift* die Logik im wahrsten Sinne des Wortes revolutioniert. Durch die Einführung der Quantoren konnte er Aussagenlogik und Prädikatenlogik in einem einheitlichen Kalkül zusammenführen. Seine logischen Arbeiten eröffneten der logischen Forschung völlig neue Wege und führten zu großartigen Ergebnissen wie z. B. Gödels Unvollständigkeitssatz.

Freges großes Projekt war die Rückführung der Mathematik auf die Logik. Frege hat seine Begriffsschrift nicht nur auf dieses „Anwendungsgebiet“ zugeschnitten, sondern bezieht auch wichtige Elemente seiner Begriffsschrift aus der Mathematik (Funktionen und Variablen), wie auch der Titel von Freges Veröffentlichung verrät (*Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildeten Formelsprache des reinen Denkens*, /Frege 1879/).

Wesentliche Charakteristika Freges Begriffsschrift und seine Argumente für die Einführung der Quantoren sollen im Hinblick auf die Frage untersucht werden, ob dies als der einzige Weg einer Integration von Aussagen und Prädikatenlogik erscheint, und ob nicht vor allem in Bezug auf eine Anwendung außerhalb der Mathematik günstigere Lösungen gefunden werden könnten.

Beim Vergleich der Struktur aussagenlogischer und prädikatenlogischer Schlußformen lassen sich Strukturähnlichkeiten feststellen, die eine einheitliche Behandlung dieser Schlußformen in einem logischen Formalismus nahelegen. Diese einheitliche Behandlung ist in Freges Begriffsschrift nicht gegeben. Sie könnte jedoch gerade in bezug auf die Vereinfachung der Inferenz in einer Wissensdatenbank große Vorteile bringen.

In der hier entwickelten Logiknotation soll eine solche einheitliche Behandlung von Aussagenlogik und Prädikatenlogik versucht werden. Weiter soll, auch im Hinblick einer Verwendung der neuen Begriffsschrift als Eingabesprache für eine Wissensdatenbank, der Bezug auf Vorerwähntes möglich sein, und es wird angestrebt, eine 1:1-Abbildung der in der Begriffsschrift verwandten Terme in Einträge/Objekte einer Wissensdatenbank zu ermöglichen. Die Entwicklung wird auf Basis einer zuvor durchgeführten gründlichen Analyse, dessen was Sprache ist, vorgenommen.

Der Name *Begriffsschrift* für die entwickelte Logiknotation wurde gewählt, da der *Begriff* in dieser eine ganz zentrale Rolle einnimmt, weit stärker als bei Frege.

Vorbemerkung: Ich werde hier aus satztechnischen Gründen nicht die Original-Notation Freges verwenden, sondern die moderne Schreibweise. Wenn ich von Freges Begriffsschrift spreche, ist in der Regel auch die heute verwandte Logiknotation mitgemeint.

2. Motivation

2.1 Struktur der Syllogismen

Das wichtigste Grundprinzip der klassischen auf Aristoteles zurückgehenden Logik, der Syllogistik, wird als *dictum de omni et nullo* bezeichnet. Es kann in etwa folgendermaßen formuliert werden (siehe /Tugendhat, Wolf 1983/, S. 76):

Was von allem einer Art positiv oder negativ gilt, das gilt auch positiv oder negativ von jedem Bestimmten, das unter diese Art fällt.

/Tugendhat, Wolf 1983/, S. 76

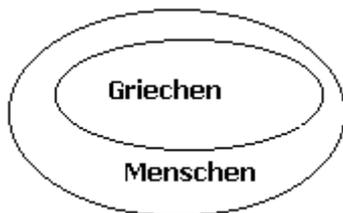
Die verschiedenen Formen der Syllogismen der 1. Figur demonstrieren dieses einfache und evidente Prinzip. Zum Beispiel:

Alle Menschen sind sterblich. (Obersatz)

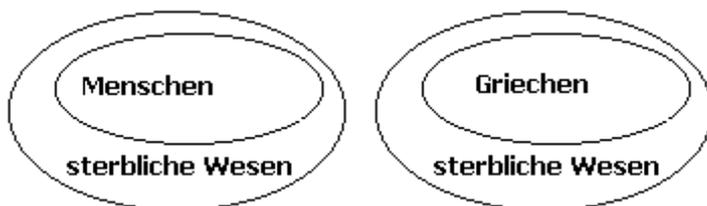
Alle Griechen sind Menschen (Untersatz)

Alle Griechen sind sterblich (Conclusio)

Man kann dies so interpretieren, daß in diesem Syllogismus des Modus Barbara das Subjekt des Untersatzes dem Subjekt des Obersatzes (dem sogenannten *terminus medius*) untergeordnet wird.



Da im Obersatz nun die Menschen unter die sterblichen Wesen eingereiht werden, trifft dies auch für die Griechen zu.



Grundlegend für die Schlußweise sind die *begrifflichen Unterordnungen*, die in den Prämissen behauptet werden.

2.2 Strukturelle Verwandtschaft aussagenlogischer und prädikatenlogischer Schlüsse

Sehen wir uns einmal den folgenden logischen Schluß an:

Wenn es kalt ist, dann ist der Heizölverbrauch hoch. (Obersatz)

Wenn es schneit, dann ist es kalt. (Untersatz)

Wenn es schneit, dann ist der Heizölverbrauch hoch. (Conclusio)

Die strukturelle Ähnlichkeit mit dem weiter oben angegebenen Syllogismus des Modus Barbara fällt sofort auf und sollte auch ernst genommen werden. Der „*Terminus medius*“ (es ist kalt), wird dem Sachverhalt eines hohen Heizölverbrauches untergeordnet. Der Sachverhalt des Schneiens wurde im Untersatz dem Sachverhalt („*Terminus medius*“) des Kalt-seins untergeordnet. Also wurde das Schneien unter den Sachverhalt des hohen Heizölverbrauches gebracht.

Der Schluß entspricht der folgenden Form:

$m \rightarrow p$

$q \rightarrow m$

$q \rightarrow p$

Die sogenannte *materiale Implikation* scheint also zwischen Sätzen eine ähnliche Verbindung herzustellen, wie sie die Prädikation oder anders ausgedrückt ein relationaler Bezug zwischen Begriffen herstellt. Die materiale Implikation weißt somit eine Verwandtschaft mit der begrifflichen Unterordnung auf.

In der zweiwertigen Logik ist es möglich, die neben dem Wenn-dann-Operator „ \rightarrow “ üblichen Operatoren „ \wedge “ (und) und „ \vee “ (oder) auf die Negation und die materiale Implikation zurückzuführen:

$q \wedge p$ kann als $\neg[p \rightarrow \neg q]$ und

$q \vee p$ als $\neg p \rightarrow q$

dargestellt werden.

Es sollte also möglich sein, eine Notation und ein Kalkül mit einer einheitlichen Behandlung von Begriffen („Griechen“, „Mensch“, „sterblich“) und Sätzen (oder Teilsätzen) zu entwickeln. Dies würde zu einer einfacheren logischen Theorie führen.

2.3 Einige Charakteristika Freges Begriffsschrift

2.3.1 Freges Auffassung von Begriffen

Frege hat letztlich Sätze als Begriffe bezeichnet (s. /Frege 1893/, S. 7 ff.). Begriffe sollten nach Frege einen Wahrheitswert denotieren (wie dies bei Sätzen der Fall ist):

Hier kann nun auch ein Ausdruck der Logik gebraucht werden: „der Begriff *Quadratwurzel aus 4* hat denselben Umfang wie der Begriff *etwas, dessen dreifaches Quadrat 12 ist*“. Bei solchen Functionen, deren Werth immer ein Wahrheitswerth ist, kann man demnach statt ‚Werthverlauf der Function‘ sagen ‚Umfang des Begriffes‘, und es erscheint zweckmäßig Begriff geradezu eine Function zu nennen, deren Werth immer ein Wahrheitswerth ist.

/Frege 1893/, S. 7f.

Beispiel für Begriffe bei Frege: $3x^2 = 12$, *Quadratwurzel aus 4*, *Hauptstadt der Schweiz*

Interessanterweise hat auch schon Frege in Bezug auf die materiale Implikation von der Unterordnung der Begriffe gesprochen (s. z. B. /Frege 1893/, S. 20).

$$x^2 > 12 @ 3x^2 > 12$$

Freges funktionale Auffassung von Begriffen entspricht nicht unbedingt unserer Intuition. Bei „rot“, „Hauptstadt der Schweiz“ etc. kommt uns zunächst weder in den Sinn das ein Funktion mit einem Funktionsargument vorliegt, noch daß ein Wahrheitswert denotiert werden soll.

2.3.2 Freges Argumente für die Einführung von Quantoren

2.3.2.1 Allgemeinheit der Verneinung/Verneinung der Allgemeinheit

Siehe /Frege 1893/ S. 11 f.

Was bedeutet?

$$\neg 2 + 3x = 5x$$

Der Ausdruck ist nicht eindeutig:

„Es muss aber sowohl die Allgemeinheit der Verneinung, als auch die Verneinung der Allgemeinheit ausdrückbar sein.“

/Frege 1893/ S. 12

$$\forall x. \neg[2 + 3x = 5x].$$

$$\neg\forall x. 2 + 3x = 5x.$$

Wir können festhalten, daß die Unterscheidung der *Allgemeinheit der Verneinung* von der *Verneinung der Allgemeinheit* in einer logischen Notation möglich sein sollte. Es stellt sich die Frage, ob die Quantifikation die einzige Möglichkeit ist, die Unterscheidung vorzunehmen.

2.3.2.2 Auffassung der generellen und singulären Termini

Siehe /Frege 1879/ S. 15 ff.

Hintergrund Frege spricht von Funktionen um dann im nächsten Schritt den All-Quantor einzuführen.

Es möge hier vor einer Täuschung gewarnt werden, zu welcher der Sprachgebrauch leicht Veranlassung giebt. Wen man die beiden Sätze:

„die Zahl 20 ist als Summe von vier Quadratzahlen darstellbar“

und

„jede positive ganze Zahl ist als Summe von vier Quadratzahlen darstellbar“

vergleicht, so scheint es möglich zu sein, „als Summe von vier Quadratzahlen darstellbar zu sein“ als Function aufzufassen, die einmal als Argument „die Zahl 20“, das andere Mal „jede positive ganze Zahl“ hat. Die Irrigkeit dieser Auffassung erkennt man durch die Bemerkung, daß „die Zahl 20“ und „jede positive ganze Zahl“ nicht Begriffe gleichen Ranges sind. Was von der Zahl 20 ausgesagt wird, kann nicht in demselben Sinne von „jede positive ganze Zahl“ ausgesagt werden. Der Ausdruck „jede positive ganze Zahl“ giebt nicht wie „die Zahl 20“ für sich allein eine selbständige Vorstellung, sondern bekommt erst durch den Zusammenhang des Satzes einen Sinn.

/Frege 1879/ S. 17

Die aristotelische Vorstellung der Synthesis des generellen Terminus mit dem Subjekt wird kritisiert.

Auf der Seite zuvor werden von Frege „Wasserstoffgas“ und „Sauerstoffgas“ als Argumente akzeptiert: (*Sauerstoffgas, Wasserstoffgas*) *schwerer sein*.

Dies erscheint inkonsequent. Wir können Fragen: Welcher Wasserstoff? Auch schwerer Wasserstoff? Der Wasserstoff in dieser Gasflasche? Jeder Wasserstoff?

Lassen sich singuläre und generelle Termini wirklich so klar voneinander abgrenzen? Bei einem isolierten Schluß oder einem System weniger Sätze ist dies in der Regel kein Problem, wohl aber bei einer umfangreichen Wissensbasis als Grundlage der Inferenz. Hier ist es durchaus denkbar, daß Wasserstoffgas dann einmal in der Rolle eines singulären und das andere mal in der Rolle eines generellen Terminus stehen würde. Dies würde dann unweigerlich zu Konflikten führen.

2.3.3 Rückführung der Wahrheit eines Satzes auf die Wahrheit der (singulären)

Teilsätze

Rückführung

- auf die aussagenlogisch verknüpften Elementarsätze
- Rückführung genereller Sätze auf singuläre Sätze
(z. B. " $\exists x . a(x) . = a(x_1) \dot{\cup} a(x_2) \dot{\cup} a(x_3) \dots$ ")

Andere Position:

Ist die Bedeutung des Satzes eingeschränkt, so daß er keinen Namen für alle Individuen, die unter eine gewisse allgemeine Beschreibung fallen, sondern nur für jedes einer Anzahl, einzeln bezeichneter und abgezählter Individuen, darstellt, so ist der Satz, obwohl er seiner sprachlichen Form nach universal ist, kein universaler Satz, sondern lediglich jene Anzahl singulärer Sätze, in abgekürzter Schreibweise. Das Vorgehen mag wie bei allen abgekürzten Notationen sehr nützlich sein, doch ist es nicht Teil der Erforschung der Wahrheit, obwohl es oft eine wichtige Rolle bei der Aufbereitung des Materials für diese Untersuchung spielt.¹

/MILL 1874/, III. II. §1 S. 211

In Bezug auf eine Anwendung in der Mathematik ist Freges Auffassung sicher zu rechtfertigen, insbesondere in Verbindung mit abzählbaren unendlichen oder endlichen Mengen. Vom methodologischen Standpunkt betrachtet handelt es sich dabei um eine einfache, eindeutige und unproblematische Betrachtungsweise.

Ist dies jedoch auch der praktikabelste Ansatz in Bezug auf die uns von unseren Sinnen präsentierten phänomenalen Welt? Das Verfahren der vollständigen Induktion steht dann nur im Ausnahmefall zur Verfügung und zu generellen Sätzen gelangen wir oft nur durch echte Induktionsschlüsse.

¹ When the singification of the term is limited so as to render it a name not for any and every individual falling under a certain general description, but only for each of a number of individuals, designated as such, and as it were counted off individually, the proposition, though it may be general in its language, is no general proposition, but merely that number of singular propositions, written in an abridged character. The operation may be very useful, as most forms of abridged notation are; but it is no part of the investigation of truth, though often bearing an important part in the preparation of the materials for that investigation.

2.3.4 Enthält Freges Begriffsschrift (und die moderne Logiknotation) redundante Elemente?

Einerseits spricht Frege bzgl. der materialen Implikation von der Unterordnung der Begriffe:

$2x > 5 @ 4x > 5$ oder

$Baum(x) @ Pflanze(x)$

Betrachten wir jetzt eine Allquantifikation:

$\forall x . Pflanze(x)$.

Bei einem eingeschränkten Variabilitätsbereich (Frege selbst schränkt allerdings den Variabilitätsbereich niemals ein) könnte die Aussage z. B. so verstanden werden:

$\forall x \in \text{Bäume} . Pflanze(x)$.

Das heißt aber doch gerade, daß der Begriff der Bäume dem Begriff der Pflanzen untergeordnet wird. Die Redundanz der sich verschränkenden Notationselemente der Quantifikation und der materialen Implikation könnte eine Ursache des hohen Komplexitätsgrades der Quantorenlogik darstellen.

3. Analyse der Sprache

(Analyse des sprachlich-ontologischen und erkenntnistheoretischen Hintergrundes)

(1) Methodologische Vorbemerkung: Die Analyse, die als Basis der begriffsschriftlichen Entwicklung dient, erfolgt phänomenologisch. (siehe hierzu /Seiffert 1975/, S. 13 ff.) Ausgangspunkt ist mein, d. h. des Autors, persönliches Empfinden und zwar in der Lage, in der ich mich als erwachsener Mensch wiederfinde. Das heißt auch, daß mir die Sprache und eine gewisse grundlegende Welterfahrung schon gegeben sind. Hinter diesen Punkt kann ich nicht mehr zurück. Methodologisch konsequent wäre es, wenn ich dieses Kapitel in der Ich-Form vortrüge. Ich möchte jedoch Sie als Zuhörer bitten, sich meinen Äußerungen anzuschließen, wenn Sie das können. Um Sie in meine Ausführungen mit aufzunehmen und Ihnen den Zugang zu erleichtern, wähle ich anstelle des *ichs* in der Regel das *wir*. Ein für die Ausführungen zentraler Begriff ist der des *Empfindens*. Mit *Empfinden* meine ich ein bewußt erlebtes Wahrnehmen eines Sinneseindrucks.

(2) Wir konstruieren die Welt um uns herum aus den Sinneseindrücken, die wir *empfinden*, den sogenannten *Qualia*. Wir selbst sehen uns als ein empfindendes Subjekt in dieser Welt und die empfundenen Sinneseindrücke legen uns nahe, daß wir die Welt mit weiteren empfindenden Co-Subjekten (Mitmenschen und Tiere) teilen. Unser Bild der Welt, wird uns durch die voneinander unterscheidbaren Sinneseindrücke vermittelt. Damit bilden die Sinneseindrücke die elementare Grundlage unserer Welterfahrung.

(3) Die Unterscheidung der verschiedenen, empfundenen Sinneseindrücke erfolgt in mehrfacher Hinsicht. So unterscheiden wir sie über das Sinnesorgan, über das wir sie empfangen haben, in Empfindungen des Tast-, Geruchs-, Geschmacks-, Hör- und Gesichtssinnes. Wir unterscheiden sie u. a. auch nach dem Zeitpunkt ihres Auftretens, an den wir uns erinnern. Diese bisher genannten Unterscheidungen nenne ich *mittelbare Sinnesunterscheidungen*.

(4) Wir unterscheiden Empfindungen darüber hinaus entsprechend den spezifischen Wahrnehmungsleistungen der einzelnen Sinnesorgane, d. h. wir können z. B. Geschmacksempfindungen danach unterscheiden, ob sie süß, sauer, salzig oder bitter sind, können vielerlei Gerüche, Klangfarben, Lautstärken und Farbtöne unterscheiden. Hier spreche ich von *nichtmittelbaren Sinnesunterscheidungen*. Wir können nicht beschreiben, was eine Empfindung im Eigentlichen ausmacht; wir können deshalb auch nicht einem Farbenblinden mitteilen - noch nicht einmal, jemandem der Farben uneingeschränkt wahrnimmt - wie wir einen spezifischen Rotton empfinden.²

(5) Allerdings bestehen für uns zwischen den selbst nicht mittelbaren Sinnesunterscheidungen Relationen, z. B. die Relationen der Gleichheit und Ungleichheit. Wir können mittels der mittelbaren Sinnesunterscheidungen zwei Sinneseindrücke identifizieren und dann miteinander vergleichen. Wir können sagen, daß zwei Farbtöne gleich

² Da wir das nicht in Sprache fassen können, sind wir auch nicht in der Lage eine Bauanweisung für eine Maschine zu verfassen, die den Rotton so wie wir empfindet, ja wir können überhaupt keine Bauanweisung für eine empfindende Maschine erstellen (D. h. nicht, daß wir keine Maschine Bauen können, die einen Sensor für Licht bestimmter Wellenlänge enthält und auf dieses Licht in bestimmter Weise reagiert. Aber das ist etwas ganz anderes.). Und so lange das, was ich nichtmittelbare Sinnesunterscheidungen nenne, nicht in Sprache gefaßt werden kann, hätten wir auch nichts von einer empfindenden Maschine, da sie uns ihre Empfindungen nicht mitteilen könnte. Siehe auch /Bühler 1992/.

oder ungleich, ähnlich oder unähnlich sind. Gleichen oder ähnlichen Empfindungen können wir gleiche oder miteinander verwandte sprachliche Ausdrücke zuordnen. So sprechen wir z. B. verschiedene Farbtöne unter dem Begriff des Blauen, der eine Abstraktion dieser sprachlichen Ausdrücke (blau, Bläue, das Blaue usw.) darstellt an. - Der Begriff des Blauen ist somit klassenbildend für einander ähnliche Farbeindrücke. - Die Relationen der Gleichheit und Ähnlichkeit können wir unseren Mitmenschen, die die gleiche Sprache sprechen wie wir, mitteilen. Wir können feststellen, daß für sie die gleichen Relationen zwischen ihren Sinneseindrücken bestehen wie für uns. Auch sie fassen beispielsweise die Farbtöne, die sich an gewissen Orten wahrnehmen lassen, wie wir unter den Begriff des Blauen, während sie Farbtöne an anderen Orten wie wir unter den Begriff des Roten stellen. Dies ist überhaupt erst die Voraussetzung dafür, daß Sprache möglich ist - es ist auch die Voraussetzung dafür, daß wir intersubjektiv von wahren und falschen Sätzen sprechen können. - Wir können bezüglich bestimmter Gegebenheiten (z. B. beim Betrachten eines bestimmten Punktes) behaupten, daß bezüglich der sich einstellenden Empfindung bestimmte Relationen zutreffen und sich die Empfindungen unter gewisse Begriffe unterordnen lassen. Eine solche Behauptung wird normalerweise mit dem Anspruch auf intersubjektive Gültigkeit ausgesprochen (wenn wir etwa sagen: „Der Fleck ist rot.“ und nicht: „Ich empfinde rot.“). Ein Mitmensch gleicher Sprache, der für gewöhnlich ebenso von diesem intersubjektiven Anspruch ausgeht - und auch von der intersubjektiven Übereinstimmung von Empfindungsrelationen - könnte diese Behauptung nun mit seiner Wahrnehmung überprüfen und hierauf der Behauptung zustimmen oder widersprechen. Demzufolge würde er den Satz, mit welchem die Relation behauptet wurde, dem Begriff des Wahren oder Falschen unterordnen.

(6) Hiermit zeigt sich daß die Unterordnung unter einen Begriff, nicht nur in Bezug auf Empfindungen, sondern beispielsweise auch in Bezug auf Sätze und Behauptungen angewendet werden kann. Eine solche Unterordnung stellt nun ihrerseits wieder eine Relation dar. Natürlich können auch Begriffe selbst wieder Begriffen untergeordnet werden. Die Begriffe des Blauen und Roten können dem Begriff der Farbe untergeordnet werden. Vom Begriff des Kalten kann dies nicht behauptet werden. Der Mensch nimmt nicht nur atomare Sinneseindrücke empfindend wahr, seine komplexen kognitiven Fähigkeiten versetzen ihn in die Lage *Dinge* oder *Gegenstände* aus den Wahrnehmungsdaten zu abstrahieren. Für diese Dinge gilt im Grunde das gleiche wie für die atomaren Empfindungen. Es bestehen Relationen der Gleichheit und Ähnlichkeit. Darüber hinaus lassen sich die Dinge aber auch durch Rückgriff der Relationen die zwischen ihren Untereinheiten bestehen, beschreiben und unterscheiden. Schließlich werden auch die Dinge aufgrund Ihrer Gleichheit oder Ähnlichkeit Begriffen zugeordnet, so daß es uns möglich ist, von Tischen, Blumen oder Steinen zu reden.

(7) Die Kriterien, die darüber entscheiden, ob wir etwas unter einen Begriff ordnen, beruhen auf Konvention und wurden von uns erlernt. Sie können sehr komplex sein - es ist z. B. nicht so leicht festzumachen, woran es liegt, daß wir manche Gegenstände als Tassen und andere Gegenstände als Krüge bezeichnen. - Schließlich ist die Zuordnung zu einem Begriff auch kreativ. Wir können Neues, bisher von uns noch nicht Erfahrenes, unter einen Begriff fassen. Das ist die Voraussetzung dafür, daß wir uns in neuen oder sich verändernden Umgebungen kommunizieren können. Die Unterordnung zu einem Begriff kann auch situationsbedingt relativ zu einem Kontext erfolgen (vgl. /Hausser 1989/, S. 326 ff).

(8) Bei der Unterordnung zu einem Begriff handelt es sich um eine Relation zwischen dem Begriff und dem Objekt, das dem Begriff zugeordnet wird. Dieses Objekt sei im folgenden auch *Begriffsobjekt* genannt. Begriffsobjekte können, wie schon gezeigt wurde Empfindungen und Sätze sein. Auch Begriffe selbst können Begriffsobjekte darstellen, z. B. wenn wir sagen: „Rot ist eine Farbe.“ oder „Bäume sind Pflanzen.“. Hier nehmen die Begriffe „Rot“ und „Baum“ die Rolle des Begriffsobjektes ein. Wenn wir einen Aussagesatz oder assertorischen

Satz aussprechen, behaupten wir auch, daß es eine Relation zwischen einem Begriff und einem Begriffsobjekt gibt oder nicht gibt („Schnecken sind keine Insekten.“).

(9) Die Relationen zwischen Begriff und Begriffsobjekt können im Satz aber auch noch eine andere Aufgabe, als die der Behauptung haben. Relationen können dazu verwendet werden, Begriffsobjekte zu identifizieren bzw. neue spezifischere Begriffe zu bilden. Wenn wir sagen: „Grüne Pflanzen sind chlorophyllhaltig.“, bilden wir den Begriff der „grünen Pflanzen“, der dem Begriff der Pflanzen untergeordnet ist. Dieser spezifischere Begriff ist nun seinerseits Begriffsobjekt von „chlorophyllhaltig“.

(10) Man muß den Satz aber noch genauer untersuchen, um zu einer befriedigenden semantischen Analyse zu gelangen. In dem Satz „Bäume sind Pflanzen“ ist die Unterordnung der Bäume unter die Pflanzen leicht nachvollziehbar. Es gibt Objekte, die Bäume genannt werden (sofern es überhaupt Bäume gibt), und diese Objekte sind identisch mit zumindest einem Teil der Objekte, die als Pflanzen bezeichnet werden. „chlorophyllhaltig“ ist aber kein Objekt, sondern ein Adjektiv, etwas kategoriell verschiedenes. Wie ist es dennoch möglich, von einer Unterordnung zu sprechen? Der Satz „Grüne Pflanzen sind chlorophyllhaltig“ läßt sich als abgekürzte Ausdrucksweise des Satzes „Grüne Pflanzen sind chlorophyllhaltige Pflanzen“ oder des Satzes „Grüne Pflanzen sind chlorophyllhaltige Objekte“ auffassen. (Es sei angemerkt, daß auch die Ausdrucksweise „grüne Pflanzen“ schon eine Art abgekürzter Ausdrucksweise darstellt. Der Begriff des Grünen bezieht sich elementarerweise auf Empfindungen. Wenn man jetzt von „grünen Pflanzen“ redet, so meint man Pflanzen, die beim Betrachten eine grüne Empfindung hervorrufen. Wenn man nicht von einer abkürzenden Redeweise sprechen will, so kann man sich auch damit begnügen im Falle von „grün“ von mehreren Verwendungsweisen zu sprechen.)

(11) Eine weitere Spezifizierung des Begriffs der grünen Pflanzen ist möglich. Wir können auch sagen „einige grüne Pflanzen“, „eine grüne Pflanze“, „diese grünen Pflanzen“ oder „diese grüne Pflanze“. Entsprechend gilt in dem Satz „diese grünen Pflanzen sind chlorophyllhaltig“ die Unterordnung nur für einen Teil der grünen Pflanzen. Bei Eigennamen ist der Bezug wie bei einem Begriff geregelt.

(12) Bisher haben wir die Unterordnung eines Begriffes unter einen anderen Begriff behandelt. Können wir davon auch bei einem sogenannten dreistelligen Verb wie „geben“ sprechen? Betrachten wir den Satz „Anna gibt Peter das Buch.“. Die semantische Analyse solcher Sätze ist umstritten. Die moderne Logik und z. B. auch der Sprachwissenschaftler Tesnière attestieren eine dreistellige Relation „gehen“. In Chomskys „Generativer Grammatik“ hingegen ist der Satz in eine Nominalphrase (Anna) und eine Verbalphrase (gibt Peter das Buch) gegliedert. Die Gliederung ist zwar vordergründig eine syntaktische, basiert jedoch in dieser Tradition auf der Analyse der semantisch zusammengehörigen Satzkomponenten, den sogenannten Konstituenten. Deshalb muß diese Aufteilung auch als eine semantische Gliederung des Satzes angesehen werden.

(13) Folgen wir Chomsky so können wir in unserem Sinne bezüglich der Verbalphrase vom Begriff „Personen, die Peter das Buch geben“ sprechen. „Anna“ wird dann diesem Begriff untergeordnet. (Es sei angemerkt, das dieser komplex gebildete Begriff nur in einem Kontext Gültigkeit hat, in dem die Referenz von „das Buch“ entsprechend bekannt ist. Das gleiche gilt in Bezug auf die Eigennamen.) Diese Analyse ist jedoch noch zu einseitig. Wir können ebenso sagen, daß Peter dem Begriff „Personen, denen von Anna ein Buch gegeben wird“ untergeordnet wird, oder daß „das Buch“ dem Begriff „Objekte, die von Anna an Peter gegeben werden“ untergeordnet wird. Wir schließen uns deshalb Tesnière und der modernen Logik an und sprechen von einer dreistelligen Relation, was eben auch bedeutet, daß die drei

beschriebenen Arten der Unterordnung behauptet werden. Im Fall eines konkreten Falles muß immer überlegt werden, welche Unterordnungen vorliegen.

(14) Auch Teilsätzen läßt sich ein Begriff zuordnen. Schon Frege hat Teilsätze als Begriffe aufgefaßt und hat in Bezug auf die materiale Implikation von der Unterordnung der Begriffe gesprochen (s. Teil I). Betrachten wir den folgenden Satz:

Ein Mann fährt einen Opel *wird untergeordnet* Ein Mann fährt ein Kraftfahrzeug

kann interpretiert werden als:

Der Sachverhalt des Opelfahrens eines Mannes *wird untergeordnet* dem Sachverhalt des Kraftfahrzeugfahrens eines Mannes.

Man könnte natürlich auch die opelfahrenden Männern den kraftfahrzeugfahrenden Männern unterordnen.

Für die den Teilsätzen zugeordneten Begriffe, ist eine Unterordnung genauso möglich, wie das bei anderen Begriffen der Fall ist. Die *Wenn-Dann-Verknüpfung* oder *materiale Implikation* läßt sich als so eine Unterordnung auffassen. Die Interpretation von Teilsätzen als Begriffe ist auch dahingehend unproblematisch, daß im Wenn-Dann-Satz immer nur der ganze Satz behauptet wird und nicht die Teilsätze. Da, wie wir wissen, über die materiale Implikation und die Negation auch die in der Aussagenlogik verwendeten *und-* und *oder-Verknüpfungen* abgebildet werden können, lassen sich die in der elementaren Prädikaten- und Aussagenlogik behandelten Aussagetypen als begriffliche Unterordnungen bzw. deren Negation interpretieren. Der traditionell als Aussagenlogik behandelte Bereich läßt sich somit als Teil der Prädikatenlogik ansehen. Der Bereich der Aussagenlogik ist jedoch (zumindest auch) daher einfacher als die Prädikatenlogik im allgemeinen, da in diesem keine drei- und mehrstelligen Relationen vorkommen.

(15) Ein wesentlicher Punkt dessen, was Sprache leistet, stellt sich als die Herstellung von Relationen der Unterordnung von Objekten und Objektklassen dar. Diese Relationen können mitgeteilt werden. Die elementarsten Relationen sind Relationen zwischen Empfindungen, wobei sich in den Relationen auch unsere Formen der Anschauung (Raum, Zeit) widerspiegeln. Die Empfindungen selbst können nicht mitgeteilt werden.

4. Entwicklung der neuen Begriffsschrift

Im **Zentrum** der Begriffsschrift stehen BEGRIFFE.

z. B. Pflanzen, Eichen, Lebewesen, Wasserstoffgas, grün, WAHR, Sachverhalt des Autofahrens eines Mannes, Informatik, Mittelfranken.

Anstelle eines Begriffs kann auch eine **Variable** gesetzt werden (Begriffsformen und Aussageformen):

z. B. a, b, x, y, z.

Welche Arten/**Kategorien** von Begriffen gibt es?

WESEN (Lebewesen, konkrete und abstrakte Gegenstände, ...):

Pflanzen, Eichen, Autos, Menschen, Logik, Liebe, Erlangen, Emil, Anna etc.

SACHVERHALTE:

(Eichen) Pflanzen

(x) y

(WESEN) BEGRIFFE

SPEZIALISIERUNGEN:

rot, schwer, WAHR

Spezialisierungen schränken einen Begriff ein:

[Kisten] rot

[SACHVERHALTE] WAHR

Sätze oder Aussagen sind wahre Sachverhalte:

(([Kisten] rot) Kisten) [SACHVERHALTE] WAHR.

((Eichen) Pflanzen).

(Wildschweine) [WESEN] schmackhaft.

Kontradiktorisches Gegenteil, Negation:

Zu jedem Begriff läßt sich sein kotradiktorisches Gegenteil bilden:

#N WAHR

#N rot

#N Kisten

Jetzt lassen sich auch negierte Aussagen behaupten:

(((Kisten) [WESEN] rund) [SACHVERHALTE] #N WAHR).

#N (((Kisten) [WESEN] rund).

Nicht exakt gleichbedeutend ist:

(Kisten) [WESEN] #N rund). was

(Kisten) (WESEN). impliziert.

Eine spezielle Form der Spezialisierung ist die Bildung der Instanz eines Begriffes mit dem **unbestimmten Artikeloperator**:

#E Tiere

#E [Kisten] rot

Hier gilt natürlich:

(#E Tiere) Tiere.

Mit dem **bestimmten Artikeloperator** kann auf die zuletzt eingeführte Instanz eines Begriffes Bezug genommen werden (bestimmte und unbestimmte Artikeloperatoren wurden auch schon in /Bühler 1994/ verwandt):

(#E [Kisten] rot) [Kisten] schwer.

(#D [Kisten] rot) [GEGENSTAENDE] teuer.

Soll auf weiter zurückliegende Instanzen bezug genommen werden, kann dies durch Indizierung geschehen:

$\#D_1$ [Kisten] rot, $\#D_2$ [Kisten] rot etc.

Aussageformen können wie schon erwähnt durch die Verwendung von Variablen formuliert werden. Die Variablen können vor Verwendung in einer Aussageform kategorisiert werden. Eine Aussageform kann dann z. B. wie folgt aufgeschrieben werden:

(x) WESEN.

(y) SPEZIALISIERUNGEN.

(x) [WESEN]y.

(u) BEGRIFFE.

(v) BEGRIFFE.

(w) BEGRIFFE.

((u)v) (v)w) (u)w.

Komplexe Sätze werden durch geschachtelte begriffliche Unterordnungen dargestellt:

(Vorausgesetzt sei: (a) SACHVERHALTE. (b) SACHVERHALTE.)

a und b: $\#N$ ($\#N$ b) a.

a oder b: ($\#N$ a) b.

a oder nicht-a: ($\#N$ a) $\#N$ a. Man erkennt hier sofort die tautologische Struktur.

Beispielhafte Darstellung einiger Satztypen in der „neuen Begriffsschrift“:

Alle Menschen sind sterblich. (*Menschen*) [WESEN] sterblich.

Nicht alle Menschen sind Griechen. ($\#E$ Menschen) $\#N$ Griechen.

Kein Mensch ist Marsianer. $\#N$ ($\#E$ Menschen) Marsianer.
oder (*Menschen*) $\#N$ Marsianer.

Einige Menschen sind Griechen. ($\#E$ Menschen) Griechen.

Die Unterscheidung der Allgemeinheit der Verneinung von der Verneinung der Allgemeinheit ist kein Problem:

$\forall_x. \neg[a(x) \rightarrow b(x)].$ (a) $\#N$ b. (Eichen sind keine Tiere)

$\neg\forall_x. a(x) \rightarrow b(x).$ $\#N$ (a) b. (Nicht alle Vögel können fliegen)

Mehrstellige Relationen

Eine einfache Notation der Form $(a, b, c, \dots) r$ könnte in Bezug auf bestimmte Sachverhalte keine eindeutige Beschreibung liefern:

$"_m \mathcal{S}_f . \text{lieben} (m, f)$ $(m, \#E f) \text{ lieben. ?}$ (Alle Männer lieben eine Frau, d. h. eventuell liebt jeder Mann eine andere Frau.)

$\mathcal{S}_f " _m . \text{lieben} (m, f)$ $(m, \#E f) \text{ lieben. ?}$ (Alle Männer lieben eine Frau, d.h., eine Frau wird von allen Männern geliebt)

Eine Klärung wäre auf folgende Weise möglich:

$(\#E f) \text{ WESEN.}$
 $(m, \#D f) \text{ lieben.}$

$"_m " _f . l(m, f)$ $(m, f) \text{ lieben.}$ (Alle Männer lieben alle Frauen)

Zu einer präziseren Notation gelangt man, wenn man das Prinzip der begrifflichen Unterordnung, das sich aus der Sprachanalyse ergibt, konsequent beachtet:

Der umgangssprachliche Satz „Männer lieben Frauen“ kann präziser als

„Jeder Mann liebt eine Frau, aber nicht jeder unbedingt die gleiche“
oder $"_m \mathcal{S}_f . \text{lieben} (m, f)$.

ausgedrückt werden. Was läßt sich aus dem Satz schließen?

Ein bestimmter Mann liebt eine Frau, nicht aber, daß jede Frau auch von einem Mann geliebt wird, kann geschlossen werden. Also liegt nur folgende begriffliche Unterordnung vor:

$(\text{Männer})[\text{WESEN}] (\#WELCH, \#E \text{ Frauen}) \text{ lieben.}$

($\#WELCH$ entspricht einem Relativpronomen – „Männer sind Wesen, welche eine Frau lieben.“)

„Alle Männer lieben alle Frauen“ ($"_m " _f . l(m, f)$) kann durch zwei begriffliche Unterordnungen präzise wiedergegeben werden:

$(\text{Männer})[\text{WESEN}] (\#WELCH, \text{Frauen}) \text{ lieben.}$ Und

$(\text{Frauen})[\text{WESEN}] (\text{Männer}, \#WELCH) \text{ lieben.}$

Alle Männer lieben eine Frau und zwar die gleiche ($\mathcal{S}_f " _m . \text{lieben} (m, f)$.) wird ebenso durch zwei begriffliche Unterordnungen beschrieben:

$(\text{Männer})[\text{WESEN}] (\#WELCH, \#E \text{ Frauen}) \text{ lieben.}$ Und

$(\#E \text{ Frauen})[\text{WESEN}] (\text{Männer}, \#WELCH) \text{ lieben.}$

Noch ein Beispiel einer dreistelligen Relation:

„Alle Frauen geben Männer Äpfel.“ ($"_f \mathfrak{S}_m \mathfrak{S}_ä .geben(m, f, ä).$)

(Frauen) [WESEN] (#WELCH, #E Männer, #E Äpfel) geben.

„Alle Frauen geben allen Männern alle Äpfel.“ ($"_f " " _m " _ä .geben(m, f, ä).$) – praktisch
allerdings eventuell undurchführbar

(Frauen) [WESEN] (#WELCH, Männer, Äpfel) geben.

(Männer) [WESEN] (Frauen, #WELCH, Äpfel) geben.

(Äpfel) [WESEN] (Frauen, Männer, #WELCH) geben.

Einge Beispiele für **Schlüsse**

Wir setzen zur Demonstration die folgende Aussageform voraus:

(x)y.

(y)z.

(x)z.

Hiermit wird eine ganze Reihe von traditionellen Schlußformen abgedeckt.

x, y und z wurden nicht weiter kategorisiert. Daher handelt es sich allgemein um Variablen für Begriffe. Diese können nun für Gegenstände stehen:

(Menschen) [Lebewesen] sterblich.

(Griechen) Menschen.

(Griechen) [Lebewesen] sterblich.

Oder auch für Sachverhalte:

(Der Heizölverbrauch ist hoch) Es ist kalt.

(Es schneit) Der Heizölverbrauch ist hoch.

(Es schneit) Es ist kalt.

Die Variablen können genauso gut für den Begriff der Nicht-Wahren oder falschen Sachverhalte stehen:

(Es ist kalt) [SACHVERHALTE] #N WAHR.

(Der Heizölverbrauch ist hoch) Es ist kalt.

(Der Heizölverbrauch ist hoch) [SACHVERHALTE] #N WAHR.

Modus tollens erweist sich somit als Sonderfall von *Modus Barbara!*

Noch ein Beispiel für *Modus Darii*:

(Griechen) Europäer.

(#E Bäcker) Griechen.

(#E Bäcker) Europäer.

Auch hier liegt die gleiche Struktur zugrunde.

Ein Schluß nach dem *Modus Celarent* läßt sich so notieren:

(Pflanzen) #N Insekten. Keine Pflanzen sind Insekten (Alle Pflanzen sind Nicht-Insekten)

(Tannen) Pflanzen.

(Tannen) #N Insekten.

5. Fazit

Auf Grundlage der sprachlichen Analyse konnte eine Logiknotation entwickelt werden, die das dort festgestellte Prinzip der begrifflichen Unterordnung widerspiegelt.

Begriffe und Aussagen werden in der neuen Logiknotation grundsätzlich gleich behandelt. Aussagen sind eine spezielle Art von Begriffen. Eine Unterscheidung ist durch eine Kategorisierung der Begriffe in WESEN, SACHVERHALTE und SPEZIALISIERUNGEN möglich. Im Gegensatz zu Frege denotieren Begriffe keine Wahrheitswerte. Teilaussagen oder Teilsätze (SACHVERHALTE) denotieren einen Sachverhalt, Sätze denotieren den Sachverhalt, daß ein Sachverhalt unter die wahren Sachverhalte gestellt wird.

Von jedem Begriff läßt sich das kontradiktorische Gegenteil bilden. Auf diese Art und Weise kann auch zu WAHR der Begriff #NICHT WAHR gebildet werden.

Zu Begriffen können speziellere Begriffe gebildet werden. Dies geschieht über sogenannte SPEZIALISIERUNGEN. Rote Kisten ([Kisten] rot) ist eine solche Spezialisierung gegenüber Kisten.

Auch mehrstellige Relationen können exakt durch Begriffsunterordnungen dargestellt werden.

Die neue Begriffsschrift erlaubt es Instanzen von Begriffen als besondere Form der Spezialisierung herauszuheben (über den unbestimmten Artikeloperator #E) auf die dann über den bestimmten Artikeloperator Bezug genommen werden kann.

Hierdurch ist auch eine Bezugnahme auf Vorerwähntes möglich, welche in Hinblick auf die Verwendung der Notation als Eingabesprache für eine Wissensdatenbank von Bedeutung ist. Eine einfache Umsetzung der Sprachelemente in Einträge einer Wissensdatenbank sollte ebenfalls möglich sein.

Eine Betrachtung der Eigenschaften von Freges Begriffsschrift und der modernen Logiknotation hat durchaus Anhaltspunkte ergeben, die es als möglich erscheinen lassen, eine Alternative zu schaffen, die vor allem für Anwendungsgebiete außerhalb der Mathematik besser geeignet ist. Meine Hoffnung ist, dies mit der vorliegenden Entwicklung erreicht zu haben.

Die Erstellung eines funktionsfähigen Kalküls auf der Basis der neuen Begriffsschrift ist noch zu leisten. Auf dessen Basis wären dann auch Aussagen zur Berechenbarkeit möglich. Dessen ungeachtet zeigen Beispiele, daß zumindest eine ganze Reihe traditioneller prädikaten- und aussagenlogischer Schlußformen auf einer einfachen Grundlage behandelt werden kann.

6. Literatur

/Bühler 1992/ G. Bühler, Über eine Schwierigkeit monistischer Auffassungen von Leib und Seele. <http://www.geraldbuehler.de/philosophie/>.

/Bühler 1994/ G. Bühler, Von der relationalen Analyse der semantischen Struktur von Sätzen zu einem Modell der logischen Struktur von Wissen. Private Urkunde, Vorliegen notariell bestätigt am 25. 10. 1994.

/Frege 1879/ G. Frege, Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildeten Formelsprache des reinen Denkens. Jena 1893. Zitiert nach Ignacio Angelelli (Hrsg.), Begriffsschrift und andere Aufsätze. 2. Aufl., Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1964.

/Frege 1893/ G. Frege, Grundgesetze der Arithmetik. Jena 1893. Zitiert nach reprografischem Nachruck, Hildesheim: Georg Olms Verlagsbuchhandlung 1966.

/Hausser 1989/ R. Hausser, Computation of Language: An Essay on Syntax, Semantics and Pragmatics in Natural Man-Machine Communication. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag 1989.

/Mill 1874/ J. St. Mill, A SYSTEM OF LOGIC, RATIOCINATIVE AND INDUCTIVE: BEING A CONNECTED VIEW OF THE PRINCIPLES OF EVIDENCE AND THE METHODS OF SCIENTIFIC INVESTIGATION. 8. Aufl., New York: Harper & Brothers 1874.

/Seiffert 1975/ H. Seiffert, Einführung in die Wissenschafts-Theorie 2. 6. Aufl., München: C. H. Beck 1975.

/Tugendhat, Wolf 1983/ E. Tugendhat, U. Wolf, Logisch-semantische Propädeutik. Ditzingen: Reclam 1983.